ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

CONCOURS D'ADMISSION 1980

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures - Coefficient : 5
(Coef. G/H : 4)

L'énoncé comporte 4 pages

- PROBLEME I -

Note : on pourra permuter les symboles $\int$ et Σ sans démonstration.

A. 1°) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$0 < \frac{t}{e^t - 1} \leqslant 1 \qquad \text{(on posera } \frac{t}{e^t - 1} = 1 \text{ pour } t=0 \text{)}$$

2°) Montrer que $\forall\, t \geqslant 0$,

$$\frac{t\, e^{-nt}}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} - \sum_{k=1}^{n} t.e^{-kt}$$

3°) Calculer $\int_0^x t.e^{-kt}\, dt$ et en déduire la valeur de I_k

$$I_k = \int_0^{\infty} t.e^{-kt}\, dt$$

4°) Déduire des résultats précédents la valeur de

$$L = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\infty} \frac{t.e^{-nt}}{e^t - 1}\, dt$$

puis démontrer l'égalité :

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

.../...

B. 1°) Montrer que la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par

$$\varphi(0) = 2a$$

$$\varphi(t) = \frac{at + bt^2}{\sin \frac{t}{2}} \qquad \text{pour} \quad t \in]0, \pi]$$

où a et b sont deux réels non nuls, est continue sur $[0, \pi]$

2°) Calculer

$$L' = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) . \sin\left(\frac{2n + 1}{2}\right) t . dt$$

3°) Déterminer les réels a et b tels que

$$\forall k \geqslant 1 , \quad \int_0^{\pi} (at + bt^2) \cos (kt)\, dt = \frac{1}{k^2}$$

4°) Sachant que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos (kt) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} ,$$

calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt$

C. On suppose que la durée d'acheminement du courrier exprimée en jours est un aléa numérique T dont la densité de probabilité est la fonction f telle que

$$f(t) = 0 \quad \text{pour tout } t < 0$$

$$f(t) = A.t.e^{-kt} \qquad \text{pour } t \geqslant 0$$

1°. Déterminer la valeur de A.

.../...

2°) a. A a désormais dans toute la suite du problème la valeur trouvée ci-dessus.

On suppose que k=2.

Représenter graphiquement la fonction f ainsi que la fonction de répartition F. de T. (unité de longueur : 5 cm)

On précisera les coordonnées des maximumset des points d'inflexion éventuels, ainsi que l'équation des tangentes aux points d'abscisse t = 0 de ces deux courbes.

b. Quelle est la probabilité pour que le courrier soit acheminé en moins de 3 jours ? (Donner cette valeur à 10^{-3} près)

c. Quelle est la probabilité pour que le courrier soit acheminé en plus de 2 jours sachant qu'il l'est en moins de 5 jours ?(Donner cette valeur à 10^{-3} près)

3°) Dans cette question k est quelconque.

Calculer la dérivée de $g(t) = (at + b).e^{-kt}$, puis déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.
En déduire l'espérance mathématique E(T) de T.

Par un raisonnement analogue, calculer $E(T^2)$ puis la variance de T.

- PROBLEME II -

Soit E_k l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à k, de la variable réelle x .

Deux fonctions f et g de E_k sont dites orthogonales sur $[-1,+1]$ si et seulement si

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{+1} f(x).g(x)\,dx = 0$$

a. On suppose qu'il existe une base $B_3 = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ de E_3 de polynômes de degrés respectifs 0,1,2 et 3, deux à deux orthogonaux.

En posant $P_0(x) = 1$, $\forall x \in [-1,+1]$

$$P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = 1$$

déterminer les polynômes P_1, P_2, et P_3 .

.../...

b. On suppose qu'il existe de même une base $B_k = (P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k)$ de E_k , de polynômes de degrés respectifs 0,1,2,.....,k , deux à deux orthogonaux et vérifiant

$$P_0(x) = 1 , \qquad \forall x \in [-1,+1]$$

$$P_1(1) = P_2(1) = P_3(1) = \ldots\ldots = P_k(1) = 1$$

Montrer que tout polynôme P_n de B_k est orthogonal à tout polynôme de E_k de degré inférieur à n.

c. On se propose de trouver l'expression de $P_n(x)$ pour $0 \leqslant n \leqslant k$

Soit A une fonction polynôme dont la dérivée d'ordre n est telle que : $A^{(n)}(x) = P_n(x) \qquad \forall x \in [-1,+1]$

et vérifiant

$$A(-1) = A^{(1)}(-1) = A^{(2)}(-1) = \ldots\ldots = A^{(n-1)}(-1) = 0$$

Soit Q un polynôme quelconque de E_k de degré (n-1) .

Par intégration par parties successives, calculer

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x).\ Q(x)\ dx$$

En déduire la valeur de $A(1)$, $A^{(1)}(1), A^{(2)}(1), \ldots\ldots, A^{(n-1)}(1)$ puis la forme générale de A(x).

En appliquant la formule de Leibnitz à

$(x^2 - 1)^n = (x + 1)^n (x-1)^n$ pour x = 1 , montrer que $P_n(x)$ s'écrit sous la forme de la dérivée d'ordre n d'une fonction polynôme que l'on précisera.

Retrouver alors les expressions de P_1, P_2, et P_3 .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail